

Fondations logiques

Introduction à la sémantique formelle

David Blunier · Université de Poitiers L3 · Printemps 2025



Quelques éléments de logique propositionnelle

- Bien que ce cours ne puisse pas se substituer à une introduction à la logique formelle (qui serait néanmoins requise), nous allons tenter de nous équiper des outils logiques nécessaires à l'étude du sens.
- Les premières notions que nous allons couvrir, entre autres, sont celles de **proposition** et d'**implication**.

Langage naturel, langage-objet et métalangage

- Dans ce cours, nous n'allons pas interpréter *directement* des phrases de l'anglais, du français ou du swahili; nous allons interpréter un langage logique qui *représente* des éléments de ces langages naturels.
- Ce langage logique, que nous allons construire ensemble, est notre **langage de représentation** (LR).
- Il ne doit pas être confondu ni avec notre **langage-objet**, qui est la langue dont nous essayons de construire une sémantique (dans ce cours, nous nous concentrerons sur des exemples du français);
- Il ne doit pas non plus être confondu avec le **métalangage**, i.e. le langage d'explication dont je me sers pour enseigner dans ce cours (qui s'avère être aussi le français).

Le langage de représentation (LR)

- Une des caractéristiques de notre LR est que celui-ci est un **langage formel**, basé sur la **logique du premier ordre**.
- La logique ne traite pas directement de phrases ou d'expressions du langage naturel; ses termes sont différents de ceux des langues naturelles.
- La première "forme" que prendra notre LR dans ce cours est celui d'une logique simple, la **logique propositionnelle (LP)**.

Propositions

- Un terme important de LP est celui de **proposition**:

Proposition (informel)

Une proposition représente une expression à laquelle il est possible d'attribuer une valeur de vérité.

- Dans ce cours, nous allons partir du principe que la relation de vérité est une fonction binaire (ou booléenne), ne pouvant prendre que deux valeurs: vrai (1) ou faux (2).

Propositions

- Les propositions peuvent être représentées, dans le langage naturel, par des phrases déclaratives (ou assertions):

a. Il neige.

b. Le chat joue avec la ficelle.

c. 7 est un nombre premier.

- Attention, les phrases déclaratives du langage naturel ne sont pas des propositions!
Par exemple, les phrases suivantes sont distinctes mais désignent toutes les deux la même proposition:

b. Le chat joue avec la ficelle.

d. Die Katze spielt mit der Schnur.

Relations logiques

- Un des objectifs majeurs de la logique formelle est d'établir des règles par lesquelles les propositions sont reliées entre elles: **des règles d'implication** (*entailment*, en anglais).
- Une logique est essentiellement un langage dans lequel on peut déterminer de telles règles d'implication et les circonstances de leur application.
- Nous allons commencer par développer une logique permettant d'établir de telles règles entre des propositions, une **logique propositionnelle**.

À quoi sert la logique?

- Une des questions majeures que se pose la logique est: sous quelles circonstances un argument peut-il être valide?
- Cette question de la validité logique est au coeur de la sémantique: une des caractéristiques majeures liées au sens linguistique réside dans la capacité que nous avons à comprendre les **relations** entre certains types d'énoncés.
- Une des relations qui nous intéressera le plus est la relation dite d'**implication**.

Implication

(1) Certains lézards sont des animaux domestiques →

(2) certains animaux domestiques sont des lézards.

- Une personne qui inférerait (2) sur la base de (1) raisonnerait correctement. En revanche une personne qui inférerait (4) sur la base de (3) produirait un jugement erroné:

(3) Tous les chats sont des animaux.

(4) Tous les animaux sont des chats.

- On dit du premier raisonnement que c'est un raisonnement **valide**, et du second qu'il est **invalide**.
- Plus particulièrement, on dit que (1) **implique** (2).

Implication et raisonnement

- L'implication peut lier ensemble plus de deux énoncés, dans ce que l'on appelle en logique un **argument**:
- Voici un argument célèbre dû à Aristote, père fondateur de la logique:
 - a. Tous les hommes sont mortels
 - b. Socrate est un homme.
 - c. ∴ Socrate est mortel.
- Chaque argument est composé de deux parties: les **prémises** (à ne pas confondre avec les prémices!), que représentent (a) et (b), et la **conclusion** (c), précédée du symbole "∴" ("en conséquence, en conclusion").

Implication et validité

- Les arguments dont la conclusion suit automatiquement des prémisses sont appelés **valides** (\therefore); quand ce n'est pas le cas, l'argument est **invalide** (\nexists).
- L'**implication** est définie comme la validité qui caractérise la relation entre les prémisses et la conclusion: si nous avons une théorie de la validité d'un argument, nous avons une théorie de l'implication.

Implication et vérité

- Quelle est la relation entre la **validité** et la **vérité**?
- Les arguments invalides peuvent avoir des conclusions fausses: pour reprendre notre exemple,

(3) Tous les chats sont des animaux.

(4) ~~✓~~. Tous les animaux sont des chats.

Implication et vérité

- Mais il peut exister des arguments invalides dont les prémisses **et** la conclusion sont vraies:

(3) Tous les chats sont des animaux.

(5) Certains animaux sont noirs.

(6) ~~/~~. Certains chats sont noirs.

- Ici, la conclusion ne **suit** pas des prémisses (on dit aussi qu'elle n'est pas garantie par les prémisses), l'argument n'est donc pas valide, bien que (6) soit vraie.

Implication et vérité

- Qu'est-ce qui rend ce raisonnement incorrect (ou invalide)?
- Une réponse intuitive est de dire que ce raisonnement est invalide parce que sa **structure**, i.e. l'agencement des prémisses (et non pas son contenu) ne garantit pas la vérité de la conclusion:
 - a. Tous les C sont A.
 - b. Certains A sont N.
 - c. ~~∴~~. Certains C sont N.

Implication et vérité

- Par conséquent, nous pouvons définir la validité de la façon suivante:

Validité

Un argument est valide **si et seulement si** (que nous abrégeons *ssi*) sa conclusion découle nécessairement de ses prémisses.

- Nous pouvons alors également formuler une définition de l'implication logique:

Implication

A **implique** B *ssi* dans tous les cas où A est vrai, B est vrai également.

Validité et solidité

- Notez que la notion de **vérité**, comme nous allons le voir, dépend toujours d'un **modèle**, c'est-à-dire d'un état des choses qui permette d'évaluer la vérité ou la fausseté de la proposition;
- La définition de la **validité** et de l'**implication** que nous avons données ne requièrent pas d'être évaluées en ce sens; seule importe la **structure** de l'argument.
- Pour cette raison, les logiciens distinguent la **validité** de la **solidité** (*soundness*).

Validité et solidité

- La **solidité** désigne la propriété d'un argument qui est non seulement valide, mais dont les prémisses sont effectivement vraies.
- Nous avons vu qu'un argument peut être valide sans pour autant être vrai (ou solide; on dit également fondé):

Exemple d'argument valide mais faux

- a. La limonade est faite avec des pastèques.
- b. La pastèque est un fruit.
- c. ∴ La limonade est faite à partir de fruits.

Validité et solidité

- Par contraste, voici un argument à la fois valide et fondé:

Exemple d'argument valide et fondé

- a. Les États-Unis sont un état fédéral.
- b. Tous les états fédéraux sont démocratiques.
- c. ∴ Les États-Unis sont un pays démocratique.

- De façon importante, si un argument est fondé, alors il est nécessairement valide.

Exercice

Par groupe, construisez au moins:

1. Un argument faux;
2. Un argument valide mais infondé;
3. Un argument fondé.

Autres relations sémantiques

- Nous avons vu en partie l'implication, qui est un type de relation logique. Existe-t-il d'autres types de relations logiques?

Implication mutuelle (équivalence)

- Deux phrases sont **équivalentes** ssi elles s'impliquent mutuellement; lorsque l'une est vraie, l'autre est nécessairement vraie et vice-versa.
- a. Je n'ai vu ni le serpent, ni l'antilope.
 - b. Je n'ai pas vu l'antilope et je n'ai pas vu le serpent.
 - c. Claire est la soeur de Diane.
 - d. Diane est la soeur de Claire.
 - e. Sam est parti avant que Marie n'arrive.
 - f. Marie est arrivée après que Sam est parti.

Implication mutuelle (équivalence)

- Aucune de ces phrases ne peut être vraie sans que l'autre ne le soit également, elles **s'impliquent mutuellement**.

Implication mutuelle

Si A est vraie, alors B est vraie; si B est vraie, alors A est vraie.

Opposition contradictoire

- Une autre relation est la **contradiction**, par laquelle deux phrases s'excluent mutuellement:

a. Tout le monde aime le chocolat.

b. Il n'est pas le cas que tout le monde aime le chocolat.

- Lorsque (a) est vraie, alors (b) est nécessairement fausse, et vice-versa:

Opposition contradictoire (contradiction)

Si A est vraie, alors B est nécessairement fausse, et vice-versa.

Opposition contraire

- Une relation ressemblante est celle d'**opposition contraire**, par laquelle deux phrases s'opposent mais ne s'excluent pas:

- a. Marie est grande.
- b. Marie est petite.

- Ensemble, (a) est (b) ne sont pas contradictoires, car il est possible que Marie ne soit ni grande, ni petite, mais de taille moyenne.

Opposition contraire

A et B ne peuvent pas être vraies ensemble; en revanche, il est possible pour A et B d'être fausses ensemble.

Exercice

Trouvez un exemple pour chaque type d'opposition.

Contradiction et tautologie

- Notez que la contradiction n'est pas uniquement une propriété désignant un type de relation entre des phrases; elle peut aussi désigner un type de relation entre des éléments d'une même phrase:

Nous avons rendez-vous mercredi et nous n'avons pas rendez-vous mercredi.

Des étudiantes ne sont pas des étudiantes.

- Ces phrases sont **toujours fausses**.
- Par contraste, certaines phrases sont toujours vraies: c'est ce que l'on appelle des **tautologies**.

Ou bien nous avons rendez-vous mercredi ou bien nous n'avons pas rendez-vous mercredi.

Toutes les étudiantes sont des étudiantes.