Logique propositionnelle

Introduction à la sémantique formelle

David Blunier · Université de Poitiers L3 · Printemps 2025

Formaliser les arguments

- Par convention, les propositions sont référencées avec les lettres de l'alphabet latin en minuscules, à partir de p:

> *p, q, r, s...*

- Ceci nous permet de formaliser en partie nos arguments.

Modus ponens

> Si il a plu hier au soir, alors la pelouse est mouillée.
> Il a plu hier au soir.
> $\therefore$ la pelouse est mouillée.

> $p \to q$
> p
> $\therefore q$

- Ce type d'argument est plus connu sous le nom de *modus ponens*, et est une forme d'argument valide.

Une fallacie: l'affirmation du conséquent

- Considérez maintenant l'argument suivant:

> Si il a plu hier au soir, alors la pelouse est mouillée.
>
> La pelouse est mouillée.
>
> Il a plu hier au soir.

- Est-ce que cet argument est valide?

Une fallacie: l'affirmation du conséquent

> Si il a plu hier au soir, alors la pelouse est mouillée.
>
> La pelouse est mouillée.
>
> $\not\therefore$ Il a plu hier au soir.

> $p \rightarrow q$
>
> q
>
> $\not\therefore p$

- Cet argument est **invalide**, car la **conclusion ne découle pas des prémisses**: il s'agit d'une fallacie (i.e., un argument qui semble valide mais qui ne l'est pas) appelée *l'affirmation du conséquent*.

Les connecteurs

- Notre langage LP se compose de variables de propositions (*p, q, r,...*), mais également de **connecteurs ou opérateurs logiques**.
- L'implication matérielle $\rightarrow$ est un type de connecteur; il permet de relier deux propositions ensemble et ainsi de former de nouvelles propositions.
- Les connecteurs logiques que nous utiliserons sont les suivants:

> $\wedge$ (conjonction)
> $\vee$ (disjonction)
> $\neg$ (négation)

- $\wedge$ et $\vee$ sont des connecteurs **binaires**, car ils permettent de relier deux propositions ensemble; $\neg$ est un connecteur **unaire**.

Tables de vérité

- Pour chaque connecteur, il est possible de représenter son interprétation (relative à un modèle) avec une **table de vérité**.
- Les tables de vérité sont un moyen de représenter toutes les **valeurs possibles** qu'une formule de LP peut avoir d'après une interprétation.

Négation

- Voici pour commencer la table de vérité (TV) de la négation:

> | | |
> |---|---|
> | p | $\neg p$ |
> | V | F |
> | F | V |

- Ceci capture toutes les possibilités d'interprétation de la négation par rapport à une proposition p: si p est vraie (V, également noté 1), alors $\neg p$ est nécessairement fausse (F, également noté 0) et inversement.

Conjonction

> | | | |
> |---|---|---|
> | p | q | $p \wedge q$ |
> | 1 | 1 | 1 |
> | 1 | 0 | 0 |
> | 0 | 1 | 0 |
> | 0 | 0 | 0 |

- $p \wedge q$ est vrai ssi p et q sont vraies ensemble.

Disjonction

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- $p \vee q$ est vrai si p est vraie, si q est vraie, et si p et q sont vraies ensemble.

Les connecteurs et le langage naturel

- On utilise informellement *et, ou* ainsi que *ne..pas* dans notre métalangage pour désigner $\wedge$, $\vee$ et $\neg$, respectivement; mais est-ce correct?
- Par exemple, il semble que *ou* ait une interprétation différente de $\vee$ dans la phrase suivante:

> Avec le menu, c'est fromage ou dessert.

- Un locuteur du français comprendra qu'il peut choisir le fromage ou le dessert, mais pas les deux. Mais cela ne correspond pas à $\vee$, qui désigne la **disjonction inclusive**.
- Pourtant, nous avons tendance à l'utliser comme une **disjonction exclusive**. Pouquoi?

De $\vee$ à *ou*

- Ce fut une des questions que Paul Grice se posa dans son célèbre travail *Logique et conversation*, qui donna naissance à la **pragmatique**.
- Le raisonnement est le suivant: bien que la **signification** (i.e., la sémantique) de *ou* dans les langues naturelles corresponde à $\vee$, son interprétation est très souvent **enrichie** afin de communiquer le plus d'informations possible.

De $\vee$ à *ou*

- On sait que cette analyse est la bonne car dans d'autres configurations, *ou* se comporte bel et bien comme $\vee$:

> Maria n'a pas invité Sam ou Frank.

- Cette phrase est vraie dans les cas ou

a. Maria n'a pas invité Sam
b. Maria n'a pas invité Frank
c. Maria n'a pas invité Sam et Frank

- Imaginez un scénario dans lequel le locuteur veut contredire une assertion préalable et dans lequel il énumère les prétendants de Maria qui n'ont pas été invités:

> Non, Maria n'as pas invité Sam ou Frank! Elle n'a invité aucun garçon!

De $\vee$ à *ou*

- Cette phrase est pourtant difficile à interpréter car, selon le même raisonnement, on lui préférera sa variante plus informative (et logiquement compatible dans ce contexte)

> Maria n'a pas invité Sam et Frank.

- Pour en savoir plus sur la distinction entre sémantique et pragmatique et les fondements de cette dernière, voir mon *crash course* sur la pragmatique.

Implication matérielle

- Voici la table de vérité de notre *modus ponens*:

> | | | |
> |---|---|---|
> | p | q | $p \to q$ |
> | 1 | 1 | 1 |
> | 1 | 0 | 0 |
> | 0 | 1 | 1 |
> | 0 | 0 | 1 |

- L'implication matérielle $\to$ est **fausse** si p est vraie et que q est fausse; elle est **vraie** dans tous les autres cas.

Implication matérielle

- Considérez le conditionnel suivant:

> S'il y a du soleil, alors il fait chaud.

- Dans quelles situations cette phrase est-elle vraie?

a. Il y a du soleil et il fait chaud.
b. Il y a du soleil et il ne fait pas chaud.
c. Il n'y a pas de soleil et il fait chaud.
d. Il n'y a pas de soleil et il ne fait pas chaud.

Biconditionnel (*si et seulement si*)

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- Le biconditionnel $\leftrightarrow$ est **vrai** uniquement si p et q sont **vraies ensemble ou fausses ensemble**. Faux dans les autres cas.

De *si* à *si et seulement si*

- Observation: lorsque l'on parle, on utilise généralement *si*... *alors* (l'équivalent supposé de $\rightarrow$) pour communiquer quelque chose de plus fort:

> Si je gagne au loto, j'achète une moto.

- Si vous dites cela à votre compagne et que vous rentrez le lendemain avec une moto, il est très probable que celle-ci en infère que vous avez gagné au loto!

De *si* à *si et seulement si*

- La réponse, d'après Grice (1975) et Horn (1979), est à nouveau **pragmatique**; les locuteurs utilisent principalement *si*...*alors* dans le sens de *si et seulement si*... *alors*.
- En d'autres termes, ils **utilisent** $\rightarrow$ pour **signifier** $\leftrightarrow$!

De $\rightarrow$ à $\leftrightarrow$

- Comment peut-on décrire le raisonnement de ma compagne devant l'achat de ma nouvelle moto?

> p: gagner au loto.
> q: acheter une moto.

> $p \leftrightarrow q$ (P1)
> q (P2)
> $\therefore p$ (C)

De $\rightarrow$ à $\leftrightarrow$

- Ceci correspond à la première ligne de la table de vérité du biconditionnel:

> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | p | q | $p \leftrightarrow q$ | |
> | **1** | **1** | **1** | $\checkmark$ |
> | 1 | 0 | 0 | (non pertinent) |
> | 0 | 1 | 0 | (biconditionnel falsifié) |
> | 0 | 0 | 1 | (non pertinent) |

- C'est donc un raisonnement valide!