Logique des prédicats 1: quantification

Introduction à la sémantique formelle

David Blunier · Université de Poitiers L3 · Printemps 2025

De LProp à LPred

- Notre logique propositionnelle LProp nous permet de représenter des propositions comme des entités atomiques:

> Mon voisin se promène tout nu et ce matin je l'ai vu.
> $p \wedge q$

- Pour représenter les langues naturelles, nous avons besoin d'un langage formel qui nous permette de représenter non pas des phrases, mais leurs **constituants**.
- Un autre langage logique nous permet de faire exactement ceci: LPrep, une **logique des prédicats**.

Constantes individuelles

- Les **constantes individuelles** (ou **noms**) sont des **objets individuels**; ils renvoient directement à une entité particulière dans le modèle.
- Elles sont représentées par des **lettres latines** correspondant aux initiales de leur nom, ou par une séquence de ces lettres.

> **Constantes individuelles**
> s : Sam
> db: David Blunier
> aav: Amphithéâtre *Agnès Varda*

Prédication

- En addition des constantes, LPrep utilise également des **prédicats**.
- Les prédicats sont des expressions qui dénotent des **propriétés** ou des **relations**, comme *être bleu, être un chien* ou encore *être le parent de*.
- Les prédicats se combine avec un ou plusieurs de ses **arguments**, dépendamment de son **arité** (le nombre d'arguments que prend un prédicat).

Arité

- Un prédicat est **unaire** s'il ne prend qu'un seul argument:

> $chien(s)$
>
> Sam est un chien.

- Un prédicat est **binaire** s'il prend deux arguments:

> $amoureuse(c, m)$
>
> Claire est amoureuse de Maria.

- Les prédicats se combinent avec leurs arguments (ici, des constantes) pour créer des **formules atomiques** (car elles ne peuvent pas être décomposées davantage).

Quantificateurs et variables

- Les nouvelles classess d'éléments importantes dans LPred sont celles des **quantificateurs** et des **variables**.
- Considérez l'argument suivant:

> Aristote était le précepteur d'Alexandre le Grand.
> Alexandre le Grand était roi.
> $\therefore$ Aristote était le précepteur d'un roi.

- Comment représenter formellement cet argument?

> $precepteur(Ar, Al)$
> $roi(Al)$
> ???

Variables

- Nous ne pouvons pas représenter la conclusion de la façon suivante $precepteur(Ar, roi)$ parce que *un roi* n'est pas une constante ici, ni un prédicat!
- C'est déjà un prédicat de quelque chose. Mais quoi?
- Nous avons besoin d'un autre type d'expression: des **variables**.
- Les variables sont comme des constantes, sauf qu'elles ne renvoient à aucun individu spécifique: elles renvoient à l'argument d'un prédicat.

> **Variables**
>
> x, y, z...

Variables

- Ansi, la dernière ligne de notre argument pourrait être représentée de la façon suivante:

> $roi(x) \wedge precepteur(Ar, x)$
> Aristote était le précepteur d'un roi.

- Cette formule, cependant, n'est pas une formule bien formée (FBF) de notre langage LPred.
- La raison en est que les variables ne peuvent pas apparaître **libres** dans une formule; elles doivent obligatoirement être **liées** par un **quantificateur**.

Le quantificateur existentiel $\exists$

- la dernière ligne de notre argument demande l'introduction du **quantificateur existentiel** $\exists$, qui **asserte l'existence d'une entité dans notre modèle.**

$$\exists x.[roi(x) \land precepteur(Ar, x)]$$

> *Il existe un x tel que x est un roi et Aristote est son précepteur.*

Le quantificateur universel $\forall$

- Considérez maintenant l'expression suivante:

> Tous les philosophes étudient Aristote.

- Pour représenter cette phrase dans LPrep, nous avons besoin d'un autre élément nous permettant de représenter la propriété d'être étudié par **tous** les philosophes: le **quantificateur universel** $\forall$.

$$\forall x[philosophe(x) \rightarrow etudie(x, Ar)]$$

> *Pour tout x, si x est un philosophe, alors x étudie Aristote.*

- Notez l'emploi de l'implication matérielle "$\rightarrow$" dans cette formule!

Le quantificateur universel $\forall$

- Ici, l'implication matérielle est cruciale. Pourquoi?
- Essayons de substituer $\land$ à $\rightarrow$:

$$\forall x[philosophe(x) \land etudie(x, Ari)]$$

> *Tous les x sont des philosophes et tous les x étudient Aristote* $\equiv$
>
> *Tout ce qui existe est un philosophe et tout ce qui existe étudie Aristote*!

Le quantificateur universel $\forall$ et l'implication matérielle

- En revanche, la formule avec $\rightarrow$ exprime ce que nous voulons dire lorsque nous disons *Tous les philosophes étudient Aristote*: il ne peut pas exister d'individu qui est un philosophe qui ne soit pas *aussi* une personne qui étudie Aristote.

$$\forall x[philosophe(x) \rightarrow etudie(x, Ar)]$$

> *Pour tout x, si x est un philosophe, alors x étudie Aristote.*

Déjà le langage naturel: les quantificateurs, leur portée et les ambiguités

- Considérez la formule suivante:

$$\forall x[linguiste(x) \rightarrow \exists y[philosophe(y) \land admire(x, y)]]$$

Portée des quantificateurs et ambiguités

- Considérez la phrase suivante:

> *Chaque linguiste admire un philosophe.*

- Cette phrase est étrange. Que pouvez-vous en dire?

Portée des quantificateurs et ambiguités

- Cette phrase est **ambiguë** en français (et dans d'autres langues); elle possède deux significations, qui peuvent se traduire par deux formules différentes dans LP.
- Une première signification est celle où le quantificateur universel a une **portée large**:

$$\forall x[linguiste(x) \rightarrow \exists y[philosophe(y) \wedge admire(x,y)]]$$

- Cette formule représente une interprétation (dite **distributive**) selon laquelle les philosophes varient en fonction des linguistes, i.e.

> Noam Chomsky admire Jerry Fodor
>
> Irene Heim admire Robert Stalnaker
>
> Amy Rose Deal admire David Kaplan
>
> ...

Portée des quantificateurs et ambiguités

- Une autre lecture est celle où **le quantificateur existentiel a une portée large:**

$$\exists y[philosophe(y) \wedge \forall x[linguiste(x) \rightarrow admire(x, y)]]$$

- D'après cette lecture (lecture dite **collective**), il existe un philosophe que tous les linguistes admirent.

> Tous les sémanticiens admirent Bob Stalnaker.

Portée des quantificateurs et ambiguités: le cas de la négation

- La portée des quantificateurs peut également affecter la **négation**:

$$\forall x.\neg happy(x)$$

- Ici, le quantificateur porte sur la négation. Cette formule peut se traduire par

> Tout le monde est malheureux (Pour tout x, il n'est pas le cas que x est heureux).

Portée des quantificateurs et ambiguités: le cas de la négation

- Mais la négation peut également avoir une **portée large** et porter sur le quantificateur:

$$\neg\forall x.happy(x)$$

- Cette formule peut se traduire par

> Il n'est pas le cas que tout le monde est heureux (Il n'est pas le cas que pour tout x, x est heureux, i.e. il existe au moins une personne malheureuse).

Portée des quantificateurs et ambiguités: le cas de la négation

- La négation est très souvent ambiguë en français:

> Tous mes voisins ne sont pas d'accord.

- Quelles sont les deux lectures possibles ici?

Portée des quantificateurs et ambiguités: le cas de la négation

> Tous les voisins ne sont pas d'accord.

- Portée large de la négation:

$$\neg\forall x.[voisin(x) \rightarrow d'accord(x)]$$

> Il n'est pas le cas que tous les voisins sont d'accord ($\equiv$ il existe au moins un voisin qui n'est pas d'accord).

Portée des quantificateurs et ambiguités: le cas de la négation

> Tous les voisins ne sont pas d'accord.

- Portée large du quantificateur $\forall$:

$$\forall x.[voisin(x) \rightarrow \neg d'accord(x)]$$

> Si une personne est un voisin, alors cette personne n'est pas d'accord ($\equiv$ il n'existe aucun voisin qui soit d'accord).

Exercice

Paraphrasez chacune des formules suivantes en français:

> 1. $\forall x. sympa(x)$
>
>   "Tout le monde est sympa."
>
> 2. $\forall x. sympa(x) \rightarrow heureux(x)$
>
>   "Tous les gens sympas sont heureux."
>
> 3. $\exists x. sympa(x) \land heureux(x)$
>
>   "Quelqu'un est sympa et heureux."
>
> 4. $\exists x. sympa(x) \lor heureux(x)$
>
>   "Quelqu'un est heureux ou sympa (ou les deux ensemble)."

Exercice

> 5. $\forall x.sympa(x) \land heureux(x)$
>   "Tout le monde est sympa et heureux." (Attention, différent de 2!)
> 6. $\forall x.\neg sympa(x)$
>   "Personne n'est sympa" $\equiv$ "Tout le monde n'est pas sympa."
> 7. $\exists x.\neg sympa(x)$
>   "Quelqu'un n'est pas sympa."
> 8. $\neg\exists x.sympa(x)$
>   "Personne n'est sympa." ($\equiv$ 6)

Exercice

> 9. $\forall x.\exists y.aime(x, y)$
>
>   "Chaque personne aime quelqu'un." (interprétation distributive: il existe pour chaque x un y tel que x aime y, et ou y est potentiellement une personne différente pour chaque x).
>
>   **À ne pas confondre avec l'interprétation collective qui s'écrirait $\exists y.\forall x.aime(x, y)$, "Il existe un y (particulier) tel que chaque x aime cette personne".**