Fonctions d'interprétation et d'assignation

Introduction à la sémantique formelle

David Blunier · Université de Poitiers L3 · Printemps 2025

Vérité et interprétation

- Jusqu'ici, nous sommes restés assez vagues quant à l'assignation de valeurs de vérités à une formule de nos langages logiques (LProp ou LPred).
- Nous avons simplement construit des tables de vérité qui représentent **toutes les interprétations possibles d'une formule**, c'est-à-dire tous les modèles de cette formule.
- Aujourd'hui, nous allons voir un moyen plus précis pour décrire cette opération.

Vérité et interprétation

- Que veut dire assigner une valeur de vérité à une formule? C'est l'**interpréter**.
- Par exemple, nous avons écrit des choses comme la table de vérité de la négation:

> | | |
> |---|---|
> | p | $\neg p$ |
> | 1 | 0 |
> | 0 | 1 |

- Chaque **ligne** de cette table représente **l'interprétation de p relativement à un modèle.**
- La première ligne est un modèle dans lequel p est vrai.
- La seconde ligne est un modèle dans lequel p est faux.

Fonction d'interprétation

- Nous pouvons penser à l'interprétation comme une fonction: une fonction qui assigne à chaque formule de LProp une valeur de vérité.
- Un autre moyen d'écrire la première ligne de notre table de vérité ci-dessus serait donc ceci:

> $[p \to 1]$

- On dit ici que p est vraie sous cette interprétation.

La fonction d'interprétation $[\![\cdot]\!]$

- La convention que nous adopterons dans ce cours est de représenter la fonction d'interprétation à l'aide de double crochets $[\![\cdot]\!]$:
- Ainsi, dans le modèle M_1 suivant:

> | | |
> |---|---|
> | p | q |
> | 1 | 0 |

Nous obtenons les valeurs suivantes:

> $[\![p]\!]^M$ = 1.
> $[\![q]\!]^M$ = 0.

La fonction d'interprétation $[\![\cdot]\!]$

- Voici la définition de notre fonction d'interprétation:

> **Fonction d'interprétation (déf)**
> Pour chaque formule bien formée ϕ, $[\![\phi]\!]^M$ représente l'interprétation de ϕ par rapport au Modèle M.

- Attention: ϕ n'est pas une variable de LProp, mais une **méta-variable** qui représente n'importe quelle formule bien formée de n'importe quel langage.
- Par convention, les méta-variables sont notées à l'aide de caractères grecs ϕ, ψ, χ...

La fonction d'interprétation $[\![\cdot]\!]$

- L'avantage est que nous pouvons utiliser $[\![\cdot]\!]$ pour attribuer des interprétations non seulement à des propositions de LProp, mais à n'importe quel bjet logique (bien formé).
- Par exemple, voici une liste d'interprétations de divers objets d'après le modèle M_2, qui comprend un ensemble de constantes individuelles:

$$\begin{bmatrix} db \to \text{David Blunier} \\ f \to \text{Fido le chien} \\ s \to \text{Selina le chat} \end{bmatrix}$$

La fonction d'interprétation $[\![\cdot]\!]$

- D'après M_2, nous obtenons:

> $[\![db]\!]^{M_2}$ = David Blunier
> $[\![f]\!]^{M_2}$ = Fido
> $[\![s]\!]^{M_2}$ = Selina

- Dans ce cas-ci, on dit également que $[\![db]\!]^{M_2}$ **dénote** David Blunier dans le modèle M_2, puisque dans notre sémantique, l'interprétation des constantes individuelles est équivalente à leurs dénotations, i.e. ce à quoi ils renvoient dans le modèle.

Interpréter les prédicats à l'aide de $[\![\cdot]\!]$

- Avec notre fonction d'interprétation, nous pouvons interpréter les constantes de LPred, mais également les FBF contenant des prédicats (pour l'instant, nous laissons de côté les quantificateurs et les variables, mais nous y reviendrons).

Interpréter les prédicats à l'aide de $[\![\cdot]\!]$

- Par exemple, quelle est la dénotation de *Selina aime Fido* dans M_2?

$$\begin{bmatrix} db \rightarrow \text{David Blunier} \\ f \rightarrow \text{Fido le chien} \\ s \rightarrow \text{Selina le chat} \\ \text{chat} \rightarrow \{s\} \\ \text{chien} \rightarrow \{f\} \\ \text{joue} \rightarrow \{\langle s, f\rangle, \langle f, s\rangle\} \\ \text{patron-de} \rightarrow \{\langle db, f\rangle, \langle db, s\rangle\} \end{bmatrix}$$

- **Notation**: les crochets **{ }** représentent un ensemble; les chevrons $\langle\rangle$ représentent des **séquences ordonnées d'individus** (ici, des paires).

Interpréter les prédicats à l'aide de $[\![\cdot]\!]$

- Par exemple, quelle est la dénotation de *Selina aime Fido* dans M_2?

> $[\![\text{Selina aime Fido}]\!]^{M_2}$ = 1

Exercice

- Donnez les interprétations des formules suivantes dans M_2:

> $[\![\text{Selina est un chien}]\!]^{M_2}$ =
> $[\![\text{David Blunier est le patron de fido}]\!]^{M_2}$ =
> $[\![\text{Selina est le patron de fido}]\!]^{M_2}$ =

Quantification et interprétation

- Nous avons vu comment interpréterd des constantes, ainsi que des formules BF de LPred contenant des prédicats et des constantes.
- Or, LPred possède également des **variables** et des **quantiicateurs**. Comment les interpréter?

Interprétation des variables

- Les variables sont interprétées différement constantes.
- Les constantes ont une valeur fixe assignée par le modèle M dans lesquelles elles sont évaluées.

> Si M_2 = $\begin{bmatrix} db \rightarrow \text{David Blunier} \\ f \rightarrow \text{Fido le chien} \\ s \rightarrow \text{Selina le chat} \end{bmatrix}$, alors $[\![db]\!]^{M_2}$ = David Blunier

- Ce n'est pas le cas des variables!

Interprétation des variables

- les variables sont évaluées par une **fonction d'assignation** (à ne pas confondre avec la fonction d'interprétation $[\![\cdot]\!]$!)
- Cette fonction d'assignation, notée g, spécifie comment une variable doit être interprétée en lui attribuant un individu dans un modèle M.
- Voici quelques exemples de fonctions d'assignation possibles pour notre modèle M_2:

> $$g_1 = \begin{bmatrix} x \rightarrow \text{David Blunier} \\ y \rightarrow \text{Fido le chien} \\ z \rightarrow \text{Selina le chat} \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} x \rightarrow \text{David Blunier} \\ y \rightarrow \text{Selina le chat} \\ z \rightarrow \text{David Blunier} \end{bmatrix}, \ldots$$

- **Attention:** notez que pour une fonction d'assignation g, deux variables peuvent avoir la même valeur (ce qui n'est jamais le cas des constantes!)

Fonction d'assignation

- Nous avons toujours besoin d'une fonction d'assignation g ainsi que d'un modèle M pour interpréter nos valeurs sémantiques.
- C'est pourquoi, au lieu d'écrire:

$$[\![\phi]\!]^M$$

Nous écrirons désormais:

$$[\![\phi]\!]^{M,g}$$

Fonction d'assignation

- Ainsi, l'interprétation (ou la dénotation, j'utiliserai les deux termes de façon interchangeable) de

$$[\![u]\!]^{M,g}$$

représente l'interprétation d'une variable u relativement à un modèle M et une fonction d'assignation g, dont la valeur est simplement ce à quoi u renvoie.

- Représenté autrement:

$$[\![u]\!]^{M,g} = g(u)$$

Exercice

Relativement aux fontions d'assignation suivantes, déterminez la valeur de:

1. $[\![x]\!]^{M,g_1}$
2. $[\![z]\!]^{M,g_2}$
3. $[\![y]\!]^{M,g_1}$
4. $[\![z]\!]^{M,g_1}$
5. $[\![y]\!]^{M,g_2}$

> $$g_1 = \begin{bmatrix} x \rightarrow \text{David Blunier} \\ y \rightarrow \text{Fido le chien} \\ z \rightarrow \text{Selina le chat} \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} x \rightarrow \text{David Blunier} \\ y \rightarrow \text{Selina le chat} \\ z \rightarrow \text{David Blunier} \end{bmatrix}, \ldots$$

Variantes-u

- Imaginons que notre l'ensemble des individus sympas de notre modèle M = {db, f}.
- Afin de désigner cette "condition" sur la fonction d'assignation, nous écrirons:

$$g[x \mapsto \{x \mid \text{sympa}(x)\}]$$

- C'est la notation ensembliste. Nous pouvons aussi préciser individu par individu, ce que nous écrivons

$$g[x \mapsto db]$$
$$g[x \mapsto f]$$

- Ceci désigne une fonction d'assignation qui diffère de g minimalement par le fait que $g(x)$ = David Blunier ou $g(x)$ = Fido.

Variantes-u

- En d'autres termes, $g[x \mapsto db]$ est exactement comme g sauf que $g(x)$ renvoie à David Blunier.
- Si $g(x)$ renvoie déjà à David Blunier (comme c'est le cas ici), alors il n'y pas de différence: $g[x \mapsto db] \equiv g(x)$.
- Sinon, une nouvelle fonction d'assignation est créée en conséquence: c'est ce qu'on appelle une **variante-u** de g.

Variantes-u

- Prenons pour exemple nos deux g introduites plus haut:

> g_1 = $\begin{bmatrix} x \rightarrow \text{David Blunier} \\ y \rightarrow \text{Fido le chien} \\ z \rightarrow \text{Selina le chat} \end{bmatrix}$, g_2 = $\begin{bmatrix} x \rightarrow \text{David Blunier} \\ y \rightarrow \text{Selina le chat} \\ z \rightarrow \text{David Blunier} \end{bmatrix}$, ...

- J'aimerais modifier g_2 minimalement de façon à ce que $g_2(z)$ = Fido. Je peux alors déterminer la variante-u suivante:

> $g_2[z \mapsto f]$ = Fido

Variantes-u

- J'aimerais modifier g_2 minimalement de façon à ce que $g_2(z)$ = Fido. Je peux alors déterminer la variante-u suivante:

> $g_2[z \mapsto f]$ = Fido

Ce qui me donnera le résultat suivant:

> $$g_2 = \begin{bmatrix} x \rightarrow \text{David Blunier} \\ y \rightarrow \text{Selina le chat} \\ z \rightarrow \text{Fido le chien} \end{bmatrix}$$

Variantes-u

- Avec ces nouveaux outils, nous pouvons dès à présent interpréter des formules dans lesquelles une ou plusieurs variables sont liées par un quantificateur.
- Par exemple, la formule

$$[\![\exists x.sympa(x)]\!]^{M,g}$$

Est **vraie** si et seulement si (ssi) nous pouvons modifier g de telle sorte à ce que *x* possède une dénotation qui rende $sympa(x)$ vrai.

- En d'autres termes: s'il existe un moyen d'attribuer à x la valeur d'un individu sympa dans le modèle.

Interprétation des formules quantifiées: $\exists$

- La règle sémantique d'interprétation pour des formules contenant $\exists$ est la suivante:

> **Règle d'interprétation sémantique: quantification existentielle**
> $[\![\exists x.\phi]\!]^{M,g} = 1$ ssi il existe un individu $k \in D$ tel que $[\![\phi]\!]^{M,g[x\mapsto k]} = 1$.

- **Rappel de notation:**
    - k est une **méta-variable** portant sur des **individus** (i.e., n'importe quel individu dans notre domaine d'individus D).

Interprétation des formules quantifiées: $\forall$

- La règle sémantique d'interprétation pour des formules contenant $\forall$ est la suivante:

> **Règle d'interprétation sémantique: quantification universelle**
> $[\![\forall u.\phi]\!]^{M,g} = 1$ ssi pour tous les individus $k \in D$, $[\![\phi]\!]^{M,g[u\mapsto k]} = 1$.

- **Rappel de notation:**
  - k est une **méta-variable** portant sur des **individus** (i.e., n'importe quel individu dans notre domaine d'individus D);
  - u est une **méta-variable** portant sur des **variables d'individus ($x, y, z, ...$)**.

Formules ouvertes et closes

- Dans LPred, une formule ϕ contenant une variable non-liée par un quantificateur est appelée une **formule ouverte**:

> $chien(x)$

- Par contraste, une formule contenant une variable liée par un quantificateur est une **formule close**:

> $\exists x.chien(x)$

Fonctions d'assignation et formules ouvertes

- Une formule ouverte, comme $chien(x)$, ne pourra être interprétée que **relativement à une fonction d'interprétation donnée**. Ainsi:

> $[\![chien(x)]\!]^{M_2, g[x \mapsto f]}$

- Cette formule ne pourra être interprétée que relativement à une fonction d'assignation que nous aurons au préalable déterminée dans M_2, par exemple g_2 ou g_3:

> $g_2 = \begin{bmatrix} x \to \text{David Blunier} \\ y \to \text{Selina le chat} \\ z \to \text{David Blunier} \end{bmatrix}, g_3 = \begin{bmatrix} x \to \text{Fido le chien} \\ y \to \text{Selina le chat} \\ z \to \text{David Blunier} \end{bmatrix}, \ldots$

> $[\![chien(x)]\!]^{M_2, g_3} = 1$

Fonctions d'assignation et formules ouvertes

- En revanche, une **formule close** n'est pas interprétée par rapport à une fonction d'assignation donnée; elle est satisfaite sous la condition qu'une telle fonction pourrait être créée.

> $[\![\exists x.chien(x)]\!]^{M_2,g}$ = 1 ssi il existe un individu $k \in D$ tel que $[\![chien(x)]\!]^{M,g[x\mapsto k]} = 1$.

- En d'autres termes, la formule est vraie ssi au moins un individu dans le domaine D de M_2 est un chien.

Fonctions d'assignation et formules ouvertes

- De la même manière, une formule contenant $\forall$ est vraie ssi tous les individus dans le domaine D de M_2 satisfont au prédicat de la variable:

> $[\![\forall x.chien(x)]\!]^{M_2,g}$ = 1 ssi tous les individus $k \in D$, $[\![chien(x)]\!]^{M,g[u \mapsto k]} = 1$.

À retenir

- Les formules closes ne sont pas relativisées à une fonction d'interprétation spécifique $g_i, g_j, ...g_n$, mais à une fonction d'interprétation potentielle, en fonction de D et M.
- Les fonctions d'assignation joueront en revanche un rôle très important lorsque nous modéliserons les pronoms.